

Grundlagen der Strömungslehre

Teil 2

14.05.2011 – 10H30

Energie- und Verfahrenstechnik AG

Agenda

1. Zusammenfassung Teil 1
2. Impulserhaltungssatz
3. Eulerscher Gleichungen
4. Bernoullische Gleichung
5. Druckverlust
6. Beispiel
7. Navier-Stokes-Gleichungen
8. Laminare und turbulente Strömungsform
9. Beispiel

1. Zusammenfassung

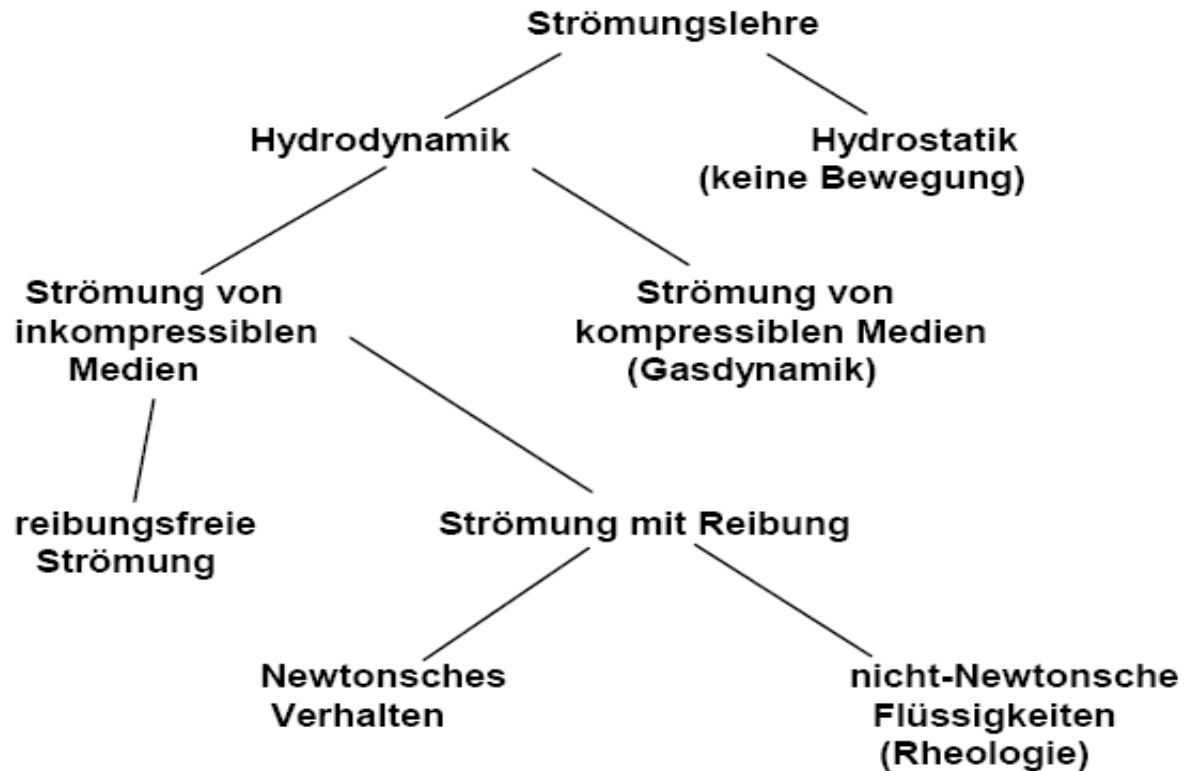


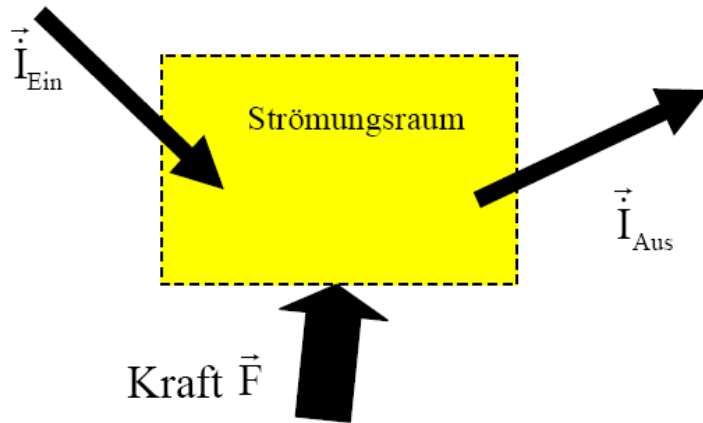
Abb.: Zusammenfassung

2. Impulserhaltungssatz

Impuls beschreibt die Bewegung eines Körpers, der eine Masse hat.

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c} \quad \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \vec{I} = \dot{\vec{I}} \quad \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\dot{\vec{I}} = \rho \cdot \dot{V} \cdot \vec{c}$$



$$\sum \dot{\vec{I}} + \sum \vec{F} = 0$$

2. Impulserhaltungssatz (1)

$$d\dot{I}_x = \rho \cdot \left(\underbrace{c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z}}_{\text{räumliche Impulsänderung (stationär)}} + \underbrace{\frac{\partial c_x}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung (instationär)}} \right) \cdot dV$$

$$df_x = f_x \cdot dV - \frac{\partial P}{\partial x} dV \quad \rightarrow \quad d\dot{I}_x = \left(f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dV$$

Volumenkräfte

Druckkräfte

3. Eulerscher Gleichungen

die Änderung des Impulsstromes im Strömungsraum gleich der Summe aller Äußeren Kräfte auf diesen Strömungsraum.

$$\rho \frac{DC}{Dt} = f - \text{grad}p$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_x}{\partial t} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

- Newtonsche Fluide

- 3-D-Strömungen

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_y}{\partial t} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

- Stationäre oder instationäre Strömungen

- Inkompressible oder kompressible Fluide

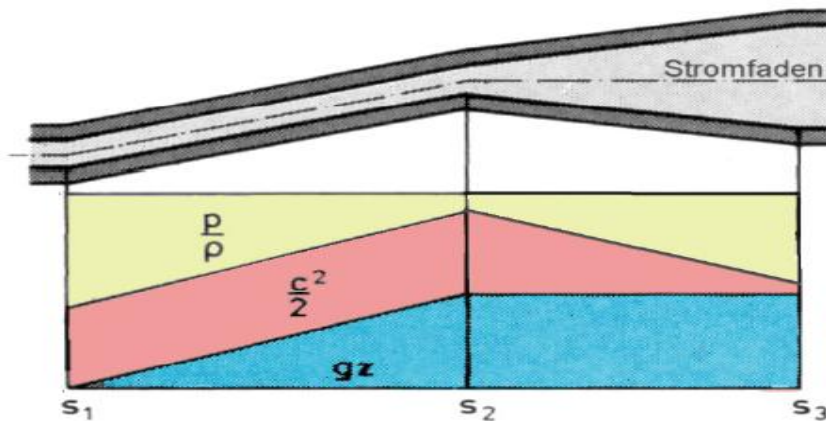
$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial t} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

- Reibungsfreie Fluide

4. Bernoullische Gleichung

Transformiert man die Koordinaten der Eulerschen Bewegungsgleichung in Bahnkoordinaten und integriert die entstandene Gleichung, so erhält man die Bernoulli-Gleichung.

$$\left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) + g \cdot (z_2 - z_1) + \left(\frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho} \right) = 0$$



- Newtonsche Fluide
- 1-D-Strömungen (Stromfaden)
- Stationäre Strömungen
- Inkompressible Fluide
- Reibungsfreie Fluide

Abb.:

5. Druckverlust

Der Druckverlust ist die durch Wandreibung und innere Fluidreibung in Rohrleitungen, Formstücken, Armaturen usw. entstehende Druckdifferenz

$$\frac{\Delta p_v}{\rho} = \xi \cdot \frac{c^2}{2} + \lambda \cdot \frac{L \cdot c^2}{D \cdot 2}$$

Verluste durch **Rohrreibung**

Verluste durch **Einbauten**

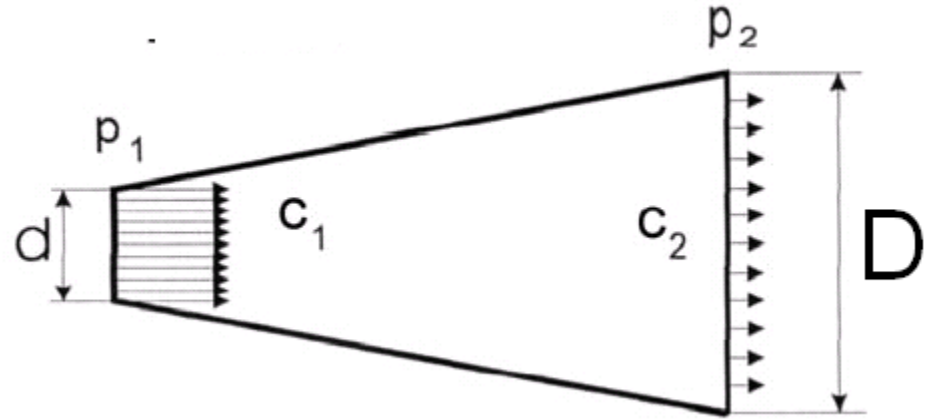
ξ = **Widerstandsbeiwert** (ist aus Tabellen zu entnehmen) [dimensionslos]

λ = **Rohrreibungszahl** (ist dem Diagramm nach **Moody** zu entnehmen, wenn keine anderen Quellen bereitstehen) [dimensionslos]

Die Rohrreibungszahl ist abhängig von der **Reynoldszahl (Re)** und der **Rauhigkeit (g)** der Rohrwand.

6. Beispiel

In einem Diffusor, der Gerade steht, fließt Wasser mit einer Eintrittsgeschwindigkeit bzw. -druck von $c_1 = 2 \text{ m/s}$ und $P_1 = 2 \text{ bar}$



1. berechnen Sie P_2 ? $d = 1 \text{ m}$, $D = 5 \text{ m}$

$$\left(\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right) + g \cdot (z_2 - z_1) + \left(\frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad P_2 = \rho \cdot \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{2} + P_1$$

$$\dot{V} = c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 = \text{Konst.} \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{c_1 \cdot A_1}{A_2} = 0,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P_2 = 2,01 \text{ bar}$$

7. Navier-Stokes-Gleichungen

Sie beschreiben die Strömung in newtonschen Flüssigkeiten und Gasen.

$$\underbrace{d\dot{I}_x}_{\text{Impuls kraft}} = \underbrace{f_x dV}_{\text{äussere Kraft}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} dV}_{\text{Druckkraft}} + \underbrace{r_x dV}_{\text{Reibungs kraft}}$$

- Newtonsche Fluide
- 3-D-Strömungen
- Stationäre oder instationäre Strömungen
- Inkompressible oder kompressible Fluide
- Reibungsbehaftete

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_x}{\partial t} \right) = f_x - \frac{dp}{dx} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_y}{\partial t} \right) = f_y - \frac{dp}{dy} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial t} \right) = f_z - \frac{dp}{dz} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right)$$

Zusammenfassung

The diagram shows the Navier-Stokes equation: $\rho \frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{c}$. The entire equation is enclosed in a red box. The left-hand side term $\rho \frac{D\mathbf{c}}{Dt}$ is enclosed in a green box. The right-hand side terms $\rho \mathbf{f}$ and $\eta \Delta \mathbf{c}$ are enclosed in a blue box. A vertical box labeled 'Reibungsterm' (viscosity term) is positioned above the blue box, with a double-headed arrow indicating its vertical extent. Below the equation, three horizontal double-headed arrows indicate the width of the terms: the first arrow is under the green box, the second is under the blue box, and the third is under the entire right-hand side. Below these arrows are three vertical boxes: 'Trägheitsterm / Impulsänderung' (inertia / impulse change) under the first arrow, 'Volumenkraft' (volume force) under the second arrow, and 'Oberflächenkräfte' (surface forces) under the third arrow.



$$\rho \frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{c}$$

Reibungsterm

Trägheitsterm / Impulsänderung

Volumenkraft

Oberflächenkräfte

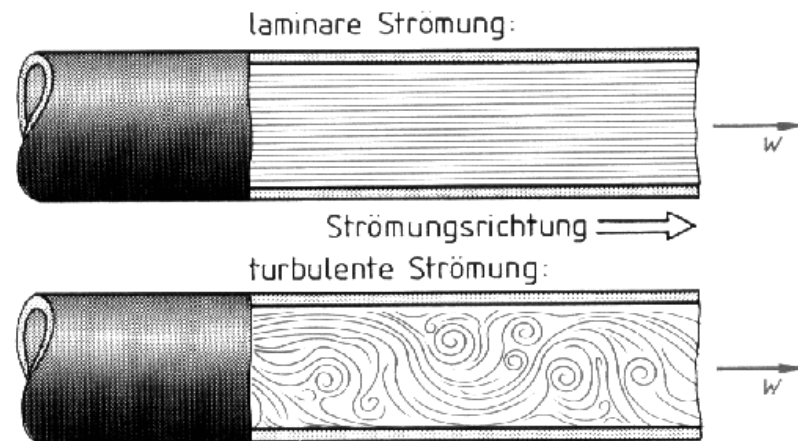
-  Navier-Stokes-Gleichung
-  Eulersche Bewegungsgleichung

8. Laminare und turbulente Strömungsform

Je nach Relativbewegung der Fluidteilchen unterscheidet man laminare und turbulente Strömungen. Die Reibungsverluste sind bei turbulenter Strömung größer als bei laminarer Strömung.

Die Reynold Zahl ist das Kriterium der Strömungsform

$$Re = \frac{c \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$



9. Beispiel

In diesem Rohr mit $d=1\text{m}$ soll eine newtonsche Flüssigkeit mit der Dichte

$$\rho = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

und der dynamischen Viskosität $\eta = 1,2 \text{ Pas}$

Ist die Strömung im Rohr laminar oder turbulent? $\dot{V} = 3000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$



Literaturverzeichnis

- [1] <http://de.wikipedia.org>
- [2] www.bmw.ch
- [3] <http://www.wori.de>
- [4] Strömungstechnik I Prof. Dr. W. Müller Stand WS
2006/2007
- [5] Schade/Kunz Strömungslehre