Grundlagen der Strömungslehre
Teil 2

14.05.2011 – 10H30

Energie- und Verfahrenstechnik AG

Agenda

1. Zusammenfassung Teil 1
2. Impulserhaltungssatz
3. Eulerscher Gleichungen
4. Bernoullische Gleichung
5. Druckverlust
6. Beispiel
7. Navier-Stokes-Gleichungen
8. Laminare und turbulente Strömungsform
9. Beispiel

1. Zusammenfassung

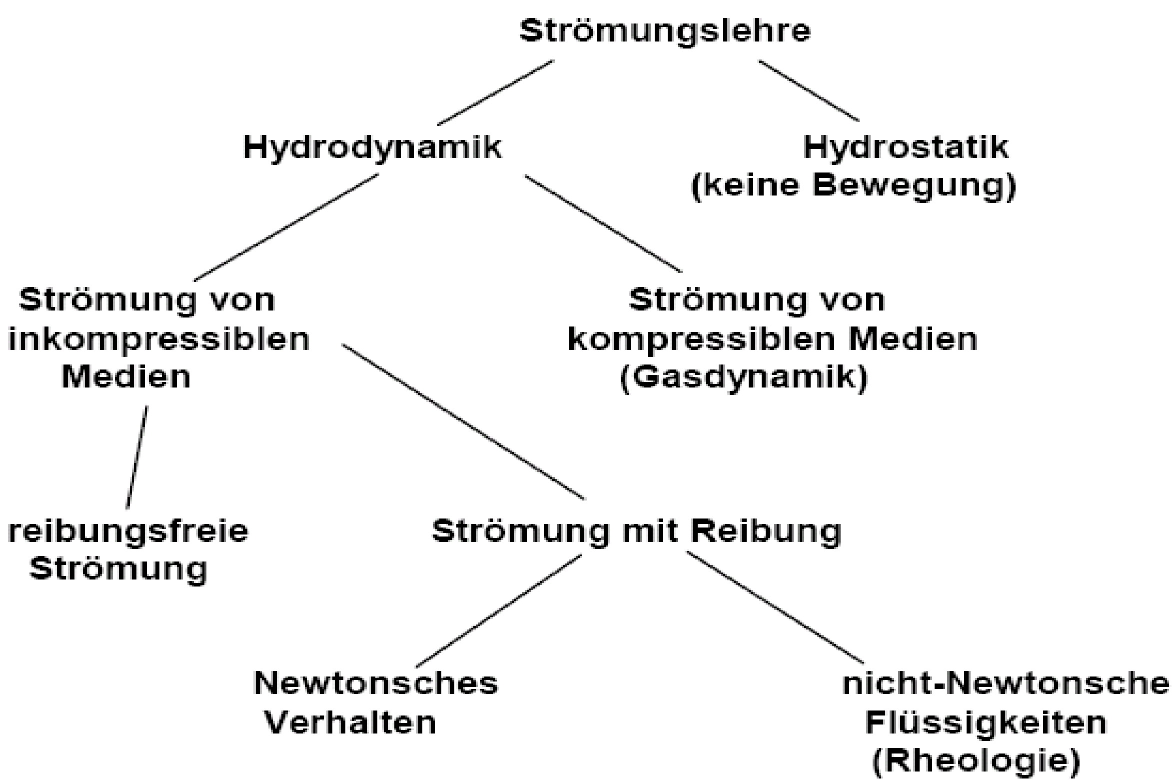


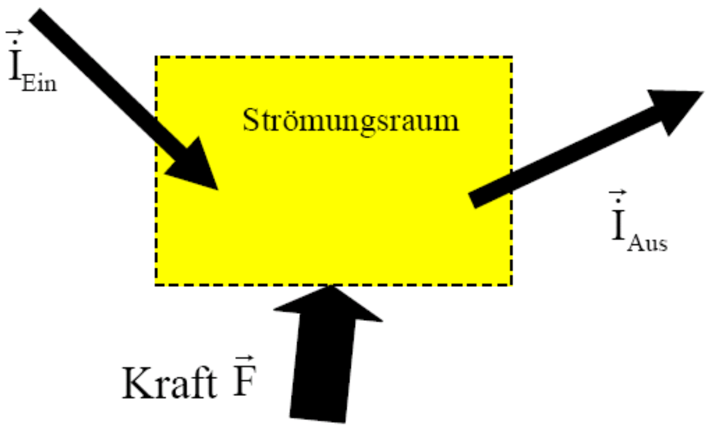
Abb.: Zusammenfassung

2. Impulserhaltungssatz

Impuls beschreibt die Bewegung eines Körpers, der eine Masse hat.

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c} \quad [\frac{kg.m}{s^2} = N] \quad \rightarrow\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{I} = \dot{I} \quad [\frac{kg.m}{s}]$$

$$\dot{I} = \rho.\dot{V}.c$$



$$\sum \vec{\dot{I}} + \sum \vec{F} = 0$$

2. Impulserhaltungssatz (1)

$$d\dot{I}_x = \rho \cdot \left(\underbrace{c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z}}_{\text{räumliche Impulsänderung (stationär)}} + \underbrace{\frac{\partial c_x}{\partial t}}_{\substack{\text{zeitliche Änderung} \\ \text{(instationär)}}} \right) \cdot dV$$

$$df_x = f_x . dV - \frac{\partial P}{\partial x} dV \quad \Rightarrow \quad d\dot{I}_x = \left(f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dV$$

Volumenkräfte

Druckkräfte

3. Eulerscher Gleichungen

die Änderung des Impulsstromes im Strömungsraum gleich der Summe aller Äußeren Kräfte auf diesen Strömungsraum.

$$\rho \frac{DC}{Dt} = f - gradp$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_x}{\partial t} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_y}{\partial t} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

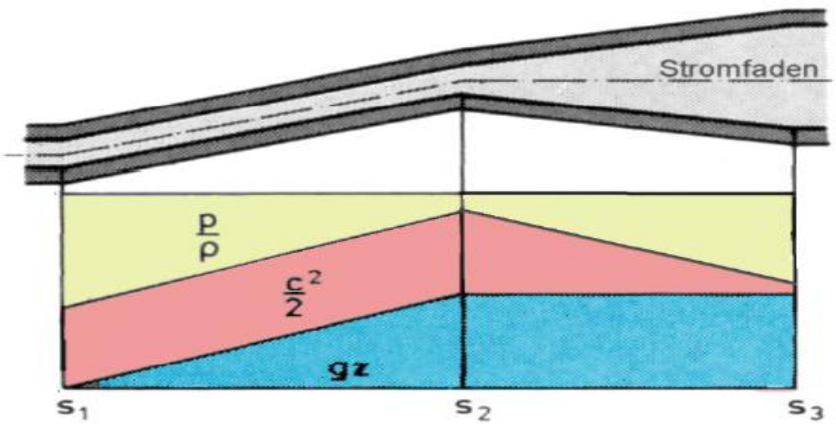
$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial t} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

- Newtonsche Fluide
- 3-D-Strömungen
- Stationäre oder instationäre Strömungen
- Inkompressible oder kompressible Fluide
- Reibungsfreie Fluide

4. Bernoullische Gleichung

Transformiert man die Koordinaten der Eulerschen Bewegungsgleichung in Bahnkoordinaten und integriert die entstandene Gleichung, so erhält man die Bernoulli-Gleichung.

$$\left(\frac{C_2^{1}}{2} - \frac{C_2^{2}}{2}\right) + g.\left(Z_2 - Z_1\right) + \left(\frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho}\right) = 0$$



- Newtonsche Fluide
- 1-D-Strömungen (Stromfaden)
- Stationäre Strömungen
- Inkompressible Fluide
- Reibungsfreie Fluide

Abb.:

5. Druckverlust

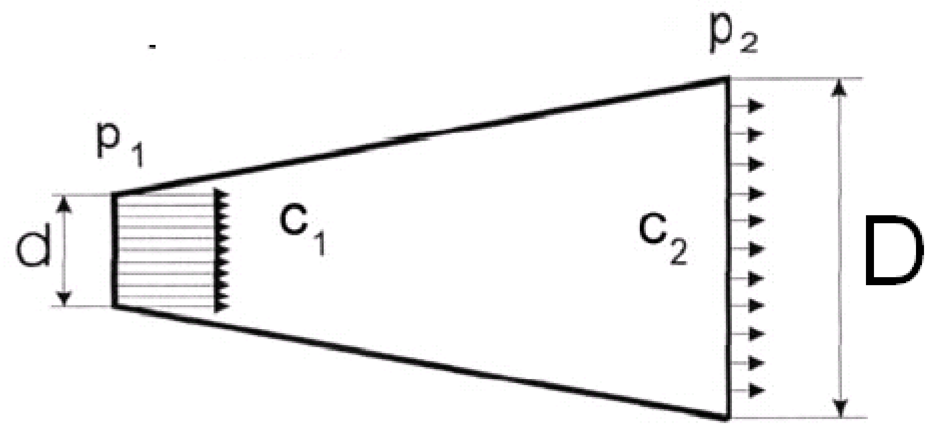
Der Druckverlust ist die durch Wandreibung und innere Fluidreibung in Rohrleitungen, Formstücken, Armaturen usw. entstehende Druckdifferenz

$$\frac{\Delta p_V}{\rho} = \underbrace{\xi \cdot \frac{c^2}{2}}_{\text{Verluste durch \textbf{Einbauten}}} + \underbrace{\lambda \cdot \frac{L \cdot c^2}{D \cdot 2}}_{\text{Verluste durch \textbf{Rohrreibung}}}$$

ξ = **Widerstandsbeiwert** (ist aus Tabellen zu entnehmen) [dimensionslos]

λ = **Rohrreibungszahl** (ist dem Diagramm nach **Moody** zu entnehmen, wenn keine anderen Quellen bereitstehen) [dimensionslos]
Die Rohrreibungszahl ist abhängig von der **Reynoldszahl** (**Re**) und der **Rauhigkeit** (**ε**) der Rohrwand.

6. Beispiel



In einem Diffusor, der Gerade steht, fließt Wasser mit einer Eintrittsgeschwindigkeit bzw. -druck von C1= 2m/s und P1=2 bar

1. berechnen Sie P2? d=1m, D=5m

$$\left(\frac{c_2^2}{2}-\frac{c_1^2}{2}\right)+g\bullet\overbrace{(z_2-z_1)}^{0}+\left(\frac{P_2}{\rho}-\frac{P_1}{\rho}\right)=0 \;\rightarrow\; P_2=\rho.\frac{(c_1^2-c_2^2)}{2}+P_1$$

$$\dot{V}=c_1\bullet A_1=c_2\bullet A_2=Konst. \;\rightarrow\; c_2=\frac{c_1\bullet A_1}{A_2}=0{,}08\frac{m}{s}$$

$$P_2=2{,}01bar$$

7. Navier-Stokes-Gleichungen

Sie beschreiben die Strömung in newtonschen Flüssigkeiten und Gasen.

- Newtonsche Fluide
- 3-D-Strömungen
- Stationäre oder instationäre Strömungen
- Inkompressible oder kompressible Fluide
- Reibungsbehaftete

$$\boxed{\underbrace{d\dot{I}_x}_{\substack{\text{Im puls}\\ \text{kraft}}} = \underbrace{f_x dV}_{\substack{\text{äussere}\\ \text{Kraft}}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} dV}_{\text{Druckkraft}} + \underbrace{r_x dV}_{\substack{\text{Re ibungs}\\ \text{kraft}}}}$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_x}{\partial t} \right) = f_x - \frac{dp}{dx} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_y}{\partial t} \right) = f_y - \frac{dp}{dy} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial t} \right) = f_z - \frac{dp}{dz} + \eta \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right)$$

Zusammenfassung

Reibungsterm

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{c}$$

Trägheitsterm / Impulsänderung

Volumenkraft

Oberflächenräfte

Navier-Stokes-Gleichung

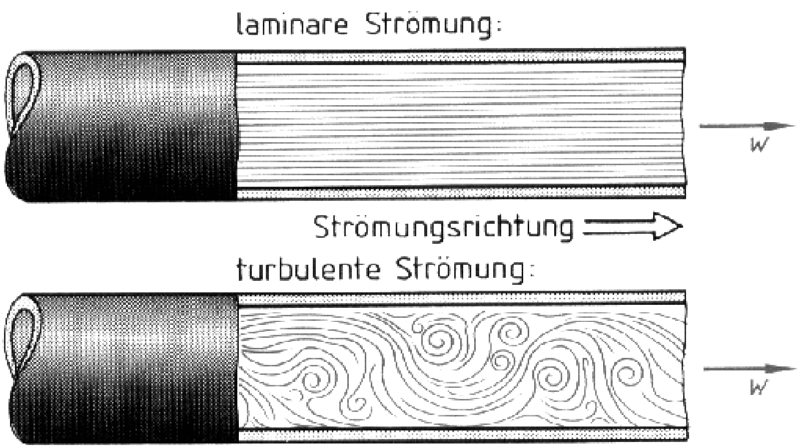
Eulersche Bewegungsgleichung

8. Laminare und turbulente Strömungsform

Je nach Relativbewegung der Fluidteilchen unterscheidet man laminare und turbulente Strömungen. Die Reibungsverluste sind bei turbulenter Strömung größer als bei laminarer Strömung.

Die Reynold Zahl ist das Kriterium der Strömungsform

$$\mathrm{Re} = \frac{c \cdot d . \rho}{\eta}$$



9. Beispiel

In diesem Rohr mit d=1m soll eine newtonsche

Flüssigkeit mit der Dichte

$$\rho = 1200\frac{kg}{m^3}$$

und der dynamischen Viskosität η = 1,2 Pas

Ist die Strömung im Rohr laminar oder turbulent? $\dot{V} = 3000\frac{m^3}{s}$

Literaturverzeichnis

[1] http://de.wikipedia.org

[2] www.bmw.ch

[3] http://www.wori.de

[4] Strömungstechnik I Prof. Dr. W. Müller Stand WS 2006/2007

[5] Schade/Kunz Strömungslehre